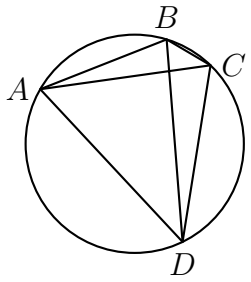
Вариант 29 — 2027

Решения заданий 1–20. Первая часть

Задание № 1

Условие. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен $73°$, угол CAD равен $55°$. Найдите угол ABC.



Решение. Искомый угол ABC состоит из углов ABD и DBC. Первый известен: $\angle ABD = 73°$. Найдём второй. Углы DBC и DAC опираются на одну дугу CD, поэтому они равны:

$$\angle DBC = \angle DAC = 55°.$$

Складываем два угла:

$$\angle ABC = 73° + 55° = 128°.$$

Ответ: $\boxed{128°}$.

Задание № 2

Условие. Даны векторы $\vec{a} = (-6; -8)$ и $\vec{b} = (12; 9)$. Найдите косинус угла между ними.

Решение. Скалярное произведение выражается двумя способами: через длины векторов и угол между ними, а также через координаты:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y.$$

Приравниваем выражения и получаем формулу для косинуса:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

В числителе $(-6)\cdot 12 + (-8)\cdot 9 = -144$. Длины находим по теореме Пифагора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

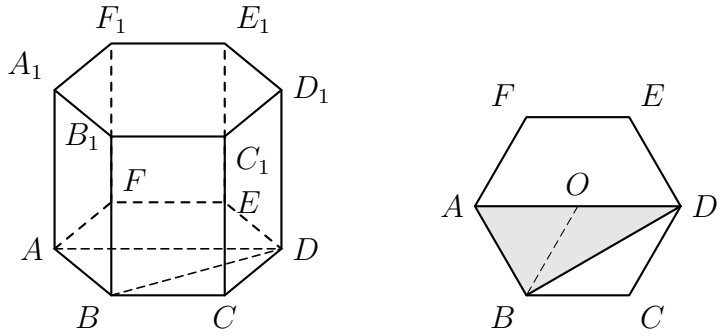
Это тройки $3, 4, 5$, увеличенные соответственно в два и в три раза.

$$\cos\varphi = \frac{-144}{10 \cdot 15} = -\frac{24}{25}.$$

Ответ: $\boxed{-\dfrac{24}{25}}$.

Задание № 3

Условие. Найдите объём многогранника с вершинами A, B, D, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 18, а боковое ребро равно 6.



Решение. Выделенный многогранник — пирамида E_1ABD. Используем формулу $V = \frac{1}{3}S_{ABD}h$. Высота совпадает с высотой призмы: $h = 6$. Нужно определить, какую часть шестиугольника составляет треугольник ABD.

Пусть сторона шестиугольника равна a. Его радиус равен стороне, поэтому большая диагональ $AD = 2a$. В треугольнике BCD стороны $BC = CD = a$, а угол $BCD = 120°$; значит, $\angle CBD = 30°$. Так как $\angle ABC = 120°$, получаем $\angle ABD = 90°$. По теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}, \qquad S_{ABD} = \frac{1}{2}\, a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Правильный шестиугольник состоит из шести равносторонних треугольников. Площадь каждого равна $\frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Чтобы найти долю площади, делим площадь треугольника на площадь шестиугольника:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABCDEF}} = \frac{a^2\sqrt{3}/2}{6a^2\sqrt{3}/4} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $S_{ABD} = 18 : 3 = 6$, и

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 = 12.$$

Ответ: $\boxed{12}$.

Задание № 4

Условие. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменов: 17 из Перу, 22 из Чили, остальные из Мексики. Порядок выступления определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым выступит спортсмен из Мексики.

Решение. Спортсменов из Мексики $50-17-22=11$. Каждый из 50 участников с одинаковой вероятностью может оказаться первым:

$$P=\frac{11}{50}=0{,}22.$$

Ответ: $\boxed{0{,}22}$.

Задание № 5

Условие. Из 10 билетов 2 являются выигрышными. Наугад берут 4 билета. Найдите вероятность того, что среди них окажется ровно один выигрышный. Ответ округлите до сотых.

Решение. Представим, что достаём четыре билета по одному без возвращения. Обозначим выигрышный билет буквой В, невыигрышный — буквой Н. Ровно один выигрышный возможен в четырёх порядках:

$$\text{ВННН},\quad \text{НВНН},\quad \text{ННВН},\quad \text{НННВ}.$$

Для первого порядка вероятности последовательных извлечений равны

$$\frac{2}{10},\quad \frac{8}{9},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{6}{7}.$$

Знаменатель каждый раз уменьшается на единицу: билетов становится меньше. После выигрышного билета остаётся восемь невыигрышных, затем семь и шесть. Вероятность этого порядка:

$$P(\text{ВННН})=\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}=\frac{2}{15}.$$

Для остальных порядков знаменатели те же, а числители $2,8,7,6$ меняются местами. Поэтому вероятности всех четырёх порядков равны. Они несовместны, значит, вероятности складываем:

$$P=4\cdot\frac{2}{15}=\frac{8}{15}=0{,}5333\ldots$$

Округляем до сотых: третья цифра после запятой равна 3.

Ответ: $\boxed{0{,}53}$.

Задание № 6

Условие. Случайная величина Y имеет распределение

$$Y:\begin{pmatrix}4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14\\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}25 & 0{,}25\end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $8 \leqslant Y \leqslant 13$.

Решение. Представим особый кубик: на его гранях написаны числа $4, 6, 8, 10, 12, 14$, а вероятности выпадения граней указаны в нижней строке таблицы. В отличие от обычного кубика, эти вероятности могут быть разными.

Нужны числа от 8 до 13 включительно. В таблице есть только 8, 10 и 12; значения 9, 11 и 13 эта случайная величина не принимает. Выпадение одного из нужных значений — несовместные события, поэтому складываем вероятности из нижней строки:

$$P(8 \leqslant Y \leqslant 13) = 0{,}15 + 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}60.$$

Ответ: $\boxed{0{,}6}$.

Задание № 7

Условие. Найдите корень уравнения $\log_2(4-5x) = 3\log_2 3$.

Решение. Вносим множитель 3 в показатель степени под логарифмом:

$$3\log_2 3 = \log_2 3^3 = \log_2 27.$$

Логарифмы с одинаковым основанием равны, когда равны их аргументы:

$$4-5x = 27, \qquad -5x = 23, \qquad x = -\frac{23}{5} = -4{,}6.$$

Проверяем область определения: $4-5x = 27 > 0$.

Ответ: $\boxed{-4{,}6}$.

Задание № 8

Условие. Найдите значение выражения $5\sin\frac{7\pi}{12}\cdot\cos\frac{7\pi}{12}$.

Решение. Узнаём формулу двойного угла $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. В выражении не хватает множителя 2: добавляем его, разделив общий коэффициент на 2.

$$5\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{5}{2}\left(2\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{5}{2}\sin\frac{7\pi}{6}.$$

Удваивается весь угол: $2\cdot\frac{7\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}$. Чтобы найти синус, выделяем π:

$$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}.$$

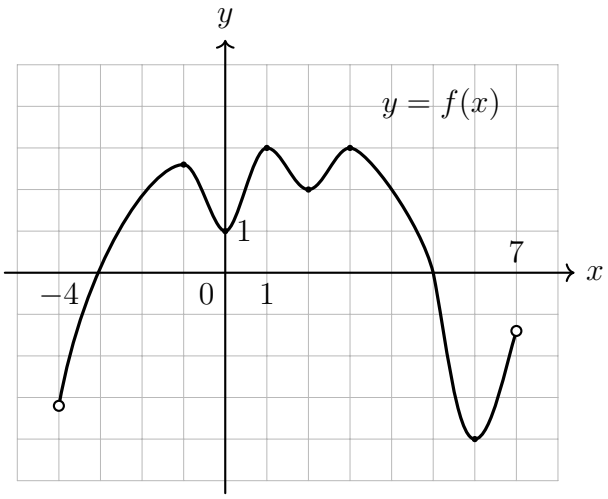
Это угол третьей четверти, где синус отрицателен: $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} = -1{,}25.$$

Ответ: $\boxed{-1{,}25}$.

Задание № 9

Условие. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. Определите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю.



Решение. Сначала определяем, какой график дан: здесь изображена сама функция $y = f(x)$, а не её производная. Значит, ищем точки с горизонтальной касательной, а не пересечения графика с осью Ox. В этих точках $f'(x) = 0$.

На данном рисунке таких точек шесть: три максимума и три минимума. Все они лежат внутри интервала $(-4; 7)$; его концы не входят в область определения.

Ответ: $\boxed{6}$.

Задание № 10

Условие. На верфи инженеры проектируют кубический аппарат для погружения на небольшие глубины. Выталкивающая сила вычисляется по формуле $F_A = \rho g l^3$, где $\rho = 1000$ кг/м^3, $g = 9{,}8$ Н/кг, l — ребро куба в метрах. Каково наибольшее значение l, если сила при погружении не должна превышать 893 025 Н?

Решение. При положительном l сила $F_A = \rho g l^3$ возрастает вместе с ребром куба. Поэтому наибольшее ребро находим при предельной силе:

$$1000 \cdot 9{,}8 \cdot l^3 = 893\,025.$$

Чтобы затем извлечь кубический корень без десятичного деления, разложим правую часть на множители:

$$893\,025 = 25 \cdot 35\,721 = 25 \cdot 7 \cdot 5103 = 25 \cdot 7^2 \cdot 3^6.$$

Слева $1000 \cdot 9{,}8 = 100 \cdot 98 = 25 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7^2$. Подставляем и сокращаем общий множитель $25 \cdot 7^2$:

$$8l^3 = 3^6 = 9^3, \qquad (2l)^3 = 9^3.$$

Следовательно, $2l = 9$, то есть $l = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

Ответ: $\boxed{4{,}5 \text{ м}}$.

Задание № 11

Условие. Двое рабочих вместе выполняют работу за 9 дней. За сколько дней выполняет эту работу первый рабочий отдельно, если за 2 дня он выполняет столько же, сколько второй — за 3 дня?

Решение. Весь объём работы примем за единицу. Пусть первый рабочий выполняет его за x дней, второй — за y дней. Скорость работы — часть всей работы, выполняемая за день.

	Скорость работы	Время, дни	Вся работа
Первый	$1/x$	x	1
Второй	$1/y$	y	1
Вместе	$1/9$	9	1

За два дня первый выполняет $2/x$ работы, за три дня второй — $3/y$. Эти части равны:

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{y} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{3x}{2}.$$

Тогда скорость второго рабочего равна $\frac{2}{3x}$. Складываем скорости и получаем совместную скорость:

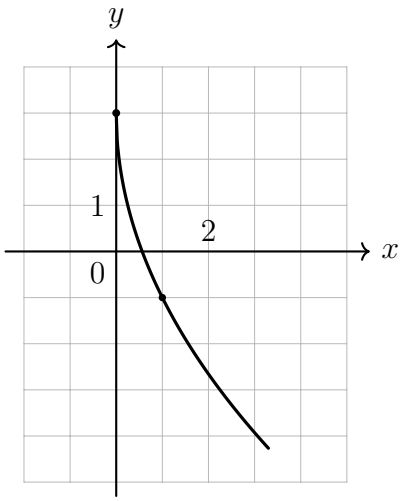
$$\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{9}.$$

Умножаем на $9x$ (при $x > 0$): $9 + 6 = x$, откуда $x = 15$.

Ответ: $\boxed{15 \text{ дней}}$.

Задание № 12

Условие. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + k\sqrt{x}$. Найдите $f(9)$.



Решение. Начинаем с вида графика $y = \sqrt{x}$. В данном случае ветвь направлена вниз, поэтому $k < 0$. Начальная точка сдвинута вверх на 3: при $x = 0$ корень равен нулю, так что сразу читаем $b = 3$.
Теперь используем отмеченную точку $(1; -1)$:

$$-1 = 3 + k\sqrt{1}, \qquad k = -4.$$

Получаем $f(x) = 3 - 4\sqrt{x}$. Подставляем $x = 9$:

$$f(9) = 3 - 4\sqrt{9} = 3 - 12 = -9.$$

Ответ: $\boxed{-9}$.

Задание № 13

Условие. В июле 2028 года Марина берёт кредит на 3 года в размере 800 тыс. рублей. В январе каждого года долг увеличивается на 15 % от суммы долга на конец предыдущего года, с февраля по июнь выплачивается часть долга. В июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 25 % меньше, чем в июле предыдущего года. К июлю 2031 года кредит должен быть погашен полностью. Найдите общую сумму платежей в рублях.

Решение. Считаем в тысячах рублей. Сначала проследим, как уменьшается сам долг после выплат, отдельно от процентов. В июле каждого из первых двух лет он уменьшается на четверть *предыдущего* остатка:

$$800 \longrightarrow 600 \longrightarrow 450 \longrightarrow 0.$$

Это остатки на июль 2028, 2029, 2030 и 2031 годов. Проценты начисляются перед очередной выплатой на суммы 800, 600 и 450. Так как $15\,\% = \frac{3}{20}$, все начисленные проценты составляют

$$800 \cdot \frac{3}{20} + 600 \cdot \frac{3}{20} + 450 \cdot \frac{3}{20} = \frac{3}{20}(800 + 600 + 450) = 277{,}5.$$

За три года Марина возвращает весь первоначальный долг и все проценты:

$$800 + 277{,}5 = 1077{,}5 \text{ тыс. руб.} = 1\,077\,500 \text{ руб.}$$

Ответ: $\boxed{1\,077\,500 \text{ руб.}}$.

Вариант 29 — 2027

Задание 14. Решение

а) Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2-1}\cdot\left(4^{3x+1}-26\cdot 8^x+12\right)=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;1]$.

1. Произведение и область определения. Если произведение равно нулю, хотя бы один из множителей равен нулю. Но корень должен быть определён в любом случае, в том числе когда обращается в ноль второй множитель. Поэтому записываем систему:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{r}4x^2-1=0,\\ 4^{3x+1}-26\cdot 8^x+12=0,\end{array}\right.\\ 4x^2-1\geqslant 0.\end{cases}$$

Из первого уравнения $x=\pm\frac{1}{2}$. Эти корни допустимы.

2. Показательное уравнение. И 4, и 8 представляются степенями двойки:

$$2^{6x+2}-26\cdot 2^{3x}+12=0.$$

Полагаем $t=2^{3x}>0$ и делим уравнение на 2:

$$2t^2-13t+6=0.$$

По теореме Виета сумма корней равна $13/2$, произведение равно 3. Получаем $t=6$ и $t=\frac{1}{2}$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$2^{3x}=6\implies x=\tfrac{1}{3}\log_2 6=\log_8 6,\qquad 2^{3x}=\tfrac{1}{2}\implies x=-\tfrac{1}{3}.$$

3. Проверка ОДЗ и отбор корней. ОДЗ: $x\leqslant-\frac{1}{2}$ или $x\geqslant\frac{1}{2}$. При $x=-\frac{1}{3}$ подкоренное выражение равно $\frac{4}{9}-1<0$; этот корень исключаем. Для второго корня сравним логарифмы с одинаковым основанием:

$$\frac{1}{2}=\log_8\sqrt{8}<\log_8 6<\log_8 8=1,$$

так как $\sqrt{8}<6<8$ и основание 8 больше 1. Значит, $\log_8 6$ удовлетворяет ОДЗ и лежит на отрезке $[-1;1]$. Корни $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ тоже лежат на этом отрезке.

Ответ к пунктам а) и б):

$$\boxed{-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2};\quad \log_8 6.}$$

Вариант 29 — 2027

Задание 15. Решение

В правильной пирамиде $SABC$ на ребре AC и боковом ребре SB отмечены точки E и N так, что $AE : EC = SN : NB = 1 : 2$. Через E и N параллельно AB проведена плоскость α.
а) Докажите, что сечением является равнобедренная трапеция.
б) Найдите объём многогранника, содержащего вершину A, если $AB = 6$, $AS = 3\sqrt{3}$.

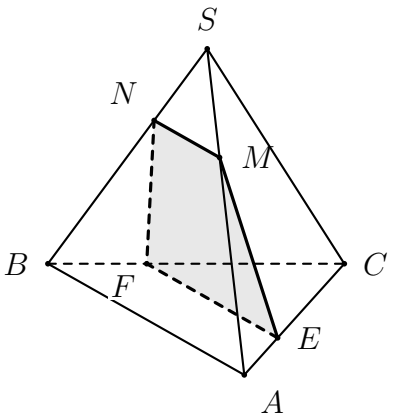


Рис. 1. Сечение $MNFE$

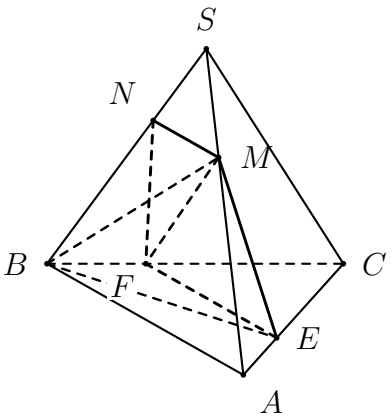


Рис. 2. Разбиение по грани BMF

а) Построение и доказательство. Обозначим через M и F точки пересечения плоскости α с рёбрами SA и BC соответственно. Так как $\alpha \parallel AB$, в гранях SAB и ABC имеем $MN \parallel AB$ и $EF \parallel AB$.
В треугольнике SAB из подобия $SMN \sim SAB$:

$$\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}, \qquad MN = \frac{1}{3}AB = 2.$$

В треугольнике CAB из подобия $CEF \sim CAB$:

$$\frac{CE}{CA} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{CF}{CB} = \frac{2}{3}, \qquad EF = \frac{2}{3}AB = 4.$$

Грани SAC и SBC правильной пирамиды равны (по трём сторонам). Соответственно расположенные точки M, N и E, F делят стороны в одинаковых отношениях, поэтому $ME = NF$. Значит, $MNFE$ — **равнобедренная трапеция**.

б) Объём части с вершиной A. Пусть O — центр основания ABC, $H = SO$ — высота всей пирамиды. В равностороннем треугольнике ABC радиус описанной окружности $AO = AB/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, поэтому

$$H = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{27 - 12} = \sqrt{15}, \quad S_{ABC} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}, \quad V = \frac{1}{3}S_{ABC}H = 9\sqrt{5}.$$

По рисунку 2 многогранник $ABEFMN$ разбивается плоскостью BMF на **пирамиду** $MABFE$ и **тетраэдр** $BMNF$.

1. Пирамида $MABFE$**.** Из подобия $CEF \sim CAB$:

$$S_{ABFE} = S_{ABC} - S_{CEF} = \left(1 - \frac{4}{9}\right) S_{ABC} = \frac{5}{9}S_{ABC}.$$

Так как $AM/AS = 2/3$, высота вершины M над основанием ABC равна $\frac{2}{3}H$. Следовательно,

$$V_{MABFE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9}S_{ABC} \cdot \frac{2}{3}H = \frac{10}{27}V.$$

2. Тетраэдр $BMNF$**.** В треугольнике SAB отрезок $MN \parallel AB$ в три раза короче AB, а расстояние от B до MN составляет $2/3$ расстояния от S до AB. Поэтому

$$\frac{S_{BMN}}{S_{SAB}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Так как $BF/BC = 1/3$, расстояние от F до плоскости SAB составляет $1/3$ расстояния от C до неё. Отсюда

$$V_{BMNF} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{2}{27}V.$$

Искомый объём:

$$\boxed{V_A = \left(\frac{10}{27} + \frac{2}{27}\right) V = \frac{4}{9} \cdot 9\sqrt{5} = 4\sqrt{5}}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Вариант 29 — 2027

Задание 16. Решение

Решите неравенство

$$x^2 \cdot \log_{125}(2-3x) + \log_{0,2}(9x^2-12x+4) < 0.$$

1. Приведём выражение к основанию 5 и учтём ОДЗ. Заметим, что $125 = 5^3$, $0{,}2 = 5^{-1}$, а $9x^2-12x+4 = (3x-2)^2$. Первый логарифм требует $2-3x>0$, то есть $x<\frac{2}{3}$. На этом промежутке второй аргумент тоже положителен.

$$\log_{125}(2-3x) = \frac{1}{3}\log_5(2-3x),$$

$$\log_{0,2}\big((3x-2)^2\big) = -\log_5\big((3x-2)^2\big) = -2\log_5|3x-2|.$$

При вынесении квадрата появляется модуль. По ОДЗ $2-3x>0$, поэтому $|3x-2| = 2-3x$. Подставляем и выносим общий логарифм:

$$\left(\frac{x^2}{3}-2\right)\log_5(2-3x) < 0, \qquad x<\frac{2}{3}.$$

2. Рационализация. Чтобы определить знак логарифма, представим ноль как $\log_5 1$:

$$\log_5(2-3x) - \log_5 1.$$

При основании $5>1$ разность логарифмов имеет тот же знак, что и разность аргументов $(2-3x)-1 = 1-3x$. Поэтому на ОДЗ исходное неравенство равносильно

$$\frac{x^2-6}{3}(1-3x) < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})(1-3x) < 0.$$

3. Завершим решение методом интервалов. На ОДЗ $x<\frac{2}{3}$ множитель $x-\sqrt{6}$ отрицателен. Значит, остаётся решить $(x+\sqrt{6})(1-3x)>0$. Произведение положительно при $-\sqrt{6}<x<\frac{1}{3}$; весь этот промежуток входит в ОДЗ.

$$\boxed{x \in \left(-\sqrt{6};\frac{1}{3}\right).}$$

Вариант 29 — 2027

Задание 17. Решение

Круизный лайнер стоит в океане бортом к волне. Под действием волн он испытывает вынужденные поперечные колебания. Зависимость амплитуды этих колебаний (в градусах) от периода волны τ (в секундах) выражается формулой

$$A(\tau) = k\theta_0 \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2-\tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}.$$

Коэффициент k определяется отношением ширины лайнера к длине волны, θ_0 — угол наибольшего волнового склона, T — период свободных поперечных колебаний лайнера на тихой воде, n — числовой коэффициент ($0 < n < 0{,}5$). При каком периоде волны τ амплитуда вынужденных колебаний лайнера будет наибольшей, если $T = 14{,}6$ с?

Считаем $k\theta_0 > 0$ постоянным множителем и $\tau > 0$. Разделим числитель и знаменатель дроби на τ^2:

$$A(\tau) = \frac{k\theta_0}{\sqrt{\left(\dfrac{T^2}{\tau^2} - 1\right)^2 + n\dfrac{T^2}{\tau^2}}}.$$

Положим $u = \dfrac{T^2}{\tau^2} > 0$. Тогда амплитуда максимальна, когда наименьшим является выражение под корнем:

$$Q(u) = (u-1)^2 + nu = u^2 + (n-2)u + 1.$$

Выделим полный квадрат:

$$\boxed{Q(u) = \left(u - 1 + \frac{n}{2}\right)^2 + n\left(1 - \frac{n}{4}\right).}$$

Наименьшее значение достигается при

$$u_* = 1 - \frac{n}{2} > 0 \qquad \left(0 < n < \frac{1}{2}\right).$$

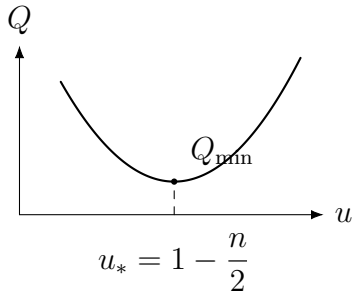


Схема минимума $Q(u)$ (не в масштабе).

Возвращаясь к τ, получаем:

$$\frac{T^2}{\tau^2} = 1 - \frac{n}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau_{\max} = 14{,}6\sqrt{\frac{2}{2-n}}\ \text{с}.}$$

Важно: значение n в условии не задано, поэтому однозначный числовой ответ получить нельзя. Из $0 < n < 0{,}5$ следует

$$\boxed{14{,}6 < \tau_{\max} < 14{,}6\sqrt{\frac{4}{3}} \approx 16{,}86\ \text{с}.}$$

Вариант 29 — 2027

Задание 18. Решение

В квадрате $ABCD$ на диагонали BD и на сторонах AB и BC отметили соответственно точки P, E и F такие, что $BE = BF$, а прямая, проходящая через точку P параллельно прямой AC, отсекает от квадрата треугольник, площадь которого равна площади четырёхугольника $EBFP$ и в четыре раза меньше площади квадрата.

а) Докажите, что если $BP \cdot BE = \sqrt{2}$, то $AB = 2$.

б) Найдите отношение площадей треугольников EPF и EBF.

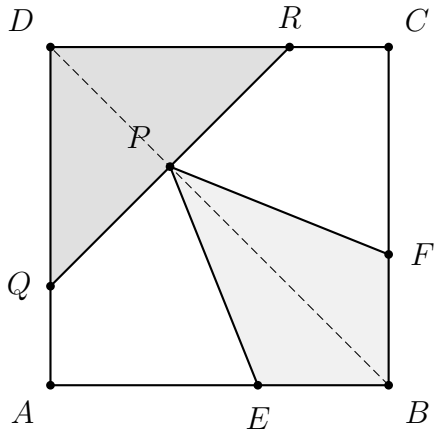


Рис. 1. $QR \parallel AC$; заштрихованные области имеют площадь $\frac{1}{4}S_{ABCD}$ каждая.

Решение. Пусть $a = AB$. Обозначим через $Q \in AD$ и $R \in CD$ точки пересечения прямой через P, параллельной AC, со сторонами квадрата, а через K — пересечение BD и EF. Поскольку $BE = BF$ и $\angle EBF = 90°$, треугольник EBF прямоугольный равнобедренный. Диагональ BD является биссектрисой его угла при B, следовательно,

$$BD \perp EF, \qquad EK = KF, \qquad BK = \frac{BE}{\sqrt{2}}, \qquad EF = 2BK.$$

Диагональ BP делит четырёхугольник $EBFP$ на два треугольника EBP и BFP. Их высоты к основанию BP равны BK; поэтому

$$S_{EBFP} = \frac{1}{2}BP \cdot BK + \frac{1}{2}BP \cdot BK = BP \cdot BK = \frac{BP \cdot BE}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}. \tag{1}$$

а) Если $BP \cdot BE = \sqrt{2}$, то по (1)

$$\frac{a^2}{4} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1, \qquad a^2 = 4, \qquad \boxed{AB = 2}.$$

б) Секущая прямая отсекает треугольник у вершины D. Действительно, если бы он отсекался у B, его площадь была бы BP^2; тогда из (1) вышло бы $BK = BP$, то есть $P = K$, и точки E, P, F лежали бы на одной прямой (четырёхугольник выродился бы).
Треугольник DQR (рис. 1) прямоугольный равнобедренный: $DQ = DR$ и $\angle QDR = 90°$. Так как $BD \perp QR$, отрезок DP — высота к гипотенузе QR; при этом $QR = 2DP$. Значит,

$$S_{DQR} = \frac{1}{2}\,QR \cdot DP = DP^2.$$

По условию $S_{DQR} = a^2/4$, откуда $DP = a/2$. Так как $BD = a\sqrt{2}$,

$$BP = BD - DP = a\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

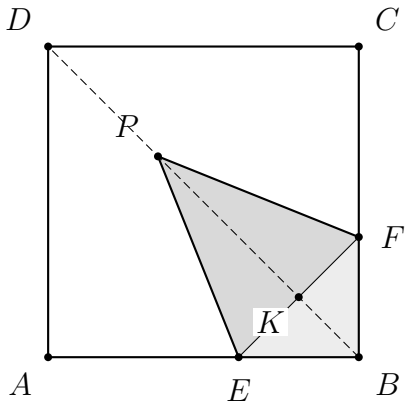


Рис. 2. Треугольники EPF и EBF имеют общее основание EF; их высоты — PK и BK.

По (1) $BK \cdot BP = a^2/4$, то есть $BK = a^2/(4BP)$. У треугольников EPF и EBF общее основание EF, поэтому отношение их площадей равно отношению высот:

$$\begin{aligned}\frac{S_{EPF}}{S_{EBF}} &= \frac{PK}{BK} = \frac{BP - BK}{BK} = \frac{BP}{BK} - 1 \\ &= \frac{4BP^2}{a^2} - 1 = 4\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \boxed{8 - 4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Ответ: а) $AB = 2$; б) $8 - 4\sqrt{2}$.

Вариант 29 — 2027

Задание 19. Решение

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{a+x^2} = \sqrt{a+y^2}, \\ x^2+y^2 = 2x+2|y|+4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

1. Уберём корни и сохраним ограничение. Обе части первого уравнения — квадратные корни, поэтому после учёта области определения их можно возвести в квадрат.

$$\sqrt{a+x^2} = \sqrt{a+y^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = y^2, \\ a+x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Достаточно одного ограничения: подкоренные выражения равны. Из разности квадратов $(x-y)(x+y)=0$ получаем $y=x$ или $y=-x$. В обоих случаях $y^2=x^2$ и $|y|=|x|$. Подставим это во второе уравнение:

$$2x^2 = 2x+2|x|+4 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-x-|x|-2=0.$$

2. Раскроем модуль и запишем пары. При $x \geqslant 0$ получаем $x^2-2x-2=0$. Дискриминант $D=12$, корни $1\pm\sqrt{3}$. Корень $1-\sqrt{3}<0$ не подходит к выбранному случаю. Остаётся $x=1+\sqrt{3}$, который даёт две пары:

$$1) \quad (1+\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}),$$
$$2) \quad (1+\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3}).$$

При $x<0$ модуль равен $-x$, и линейные слагаемые сокращаются: $x^2-2=0$. Из корней $\pm\sqrt{2}$ подходит только $x=-\sqrt{2}$. Получаем ещё две пары:

$$3) \quad (-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}), \qquad 4) \quad (-\sqrt{2};\ \sqrt{2}).$$

Решение системы — пара $(x;y)$, поэтому каждому найденному x здесь соответствуют два разных решения.

3. Вернёмся к параметру. Все пары должны удовлетворять $a \geqslant -x^2$. Пары 1 и 2 существуют при $a \geqslant -(1+\sqrt{3})^2 = -4-2\sqrt{3}$. Пары 3 и 4 существуют при $a \geqslant -(-\sqrt{2})^2 = -2$. Минус перед квадратом сохраняется. Следовательно, при $a < -4-2\sqrt{3}$ решений нет; при $-4-2\sqrt{3} \leqslant a < -2$ есть только пары 1 и 2; при $a \geqslant -2$ существуют все четыре пары.



Левую границу включаем, поскольку нулевое подкоренное выражение допустимо. Правую исключаем: при $a=-2$ уже четыре решения.

$$\boxed{a \in [-4-2\sqrt{3};\ -2).}$$

Вариант 29 — 2027

Задание 20. Решение

Дан набор натуральных чисел, каждое из которых меньше 100 и записано с помощью цифр 1, 3, 5, 7 или 9. В наборе есть хотя бы одно однозначное и хотя бы одно двузначное число. Из этого набора получили второй набор чисел следующим образом:

- к каждому однозначному числу приписали цифру, с помощью которой это число было записано;
- вместо каждого двузначного числа записали среднее арифметическое двух его цифр.

а) Может ли сумма чисел первого набора быть на 6 меньше суммы чисел второго набора?
б) Может ли сумма чисел первого набора быть в два раза больше суммы чисел второго набора?
в) Найдите наибольшее возможное отношение суммы чисел второго набора к сумме чисел первого набора, если в первом наборе не было одинаковых чисел, а однозначных чисел было столько же, сколько и двузначных.

Пусть d — однозначное число, а $10a+b$ — двузначное число, где $d, a, b \in \{1,3,5,7,9\}$. Тогда

$$d \longmapsto 11d, \qquad 10a+b \longmapsto \frac{a+b}{2}.$$

а) Да, может. Возьмём первый набор $\{3, 11, 19\}$.

	3	11	19	Сумма
Первый набор	3	11	19	33
Второй набор	33	1	5	39

Получили $39 - 33 = 6$, как и требуется.
б) Да, может. Возьмём первый набор $\{3, 71\}$. После преобразования получим $\{33, 4\}$. Следовательно,

$$S_1 = 3 + 71 = 74, \qquad S_2 = 33 + 4 = 37, \qquad S_1 = 2S_2.$$

в) Найдём максимум S_2/S_1**.** По условию количество однозначных и двузначных чисел одинаково. Поэтому можно произвольно разбить числа первого набора на пары: одно однозначное d и одно двузначное $10a+b$.
Для каждой пары докажем оценку

$$11d + \frac{a+b}{2} \;\leqslant\; 5(d+10a+b).$$

Действительно, разность правой и левой частей равна

$$5(d+10a+b) - \left(11d + \frac{a+b}{2}\right) = \frac{99a+9b-12d}{2} \geqslant \frac{99+9-12\cdot 9}{2} = 0.$$

Здесь использовали $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ и $d \leqslant 9$. Сложив такие неравенства по всем парам, получаем

$$S_2 \leqslant 5S_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{S_2}{S_1} \leqslant 5}.$$

Проверим достижимость границы. Для первого набора $\{9, 11\}$ (числа различны, однозначных и двузначных поровну) второй набор равен $\{99, 1\}$, откуда

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{99+1}{9+11} = \frac{100}{20} = 5.$$

Ответ:

$$\boxed{\text{а) да;} \quad \text{б) да;} \quad \text{в) 5.}}$$